

Proposta de trabalho – 2



- c) Uma amostra de origem vegetal foi datada de aproximadamente 15 200 anos. Qual a percentagem de carbono 14 contida nessa amostra, relativamente à quantidade inicial?
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

$$[Q(t) = Q_0 \times e^{-0,000121t}]$$

Matemática B
11.º ano

Proposta de trabalho

Numa experiência laboratorial, para obter cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se num recipiente uma certa quantidade de água do mar e expôs-se a uma fonte de calor.

Após t horas do início da experiência, a quantidade de água, em mililitros, existente no recipiente, é dada

pelo modelo $Q(t) = 10^3 \times \log\left(\frac{10}{t+1}\right)$, com $t \geq 0$.

a) Qual a quantidade de água **utilizada na experiência?**



Proposta de trabalho

b) Mostre que $-500 \log(1,5)$ é o valor exato da taxa média de variação da função Q no intervalo $[3, 5]$.

$$t.m.v._{[3, 5]} = \frac{Q(5) - Q(3)}{5 - 3}$$

$$= \frac{10^3 \times \log \frac{5}{3} - 10^3 \times \log \frac{5}{2}}{2}$$

$$= \frac{10^3 \times \log \frac{5}{3} - \log \frac{5}{2}}{2} = \frac{1000 \times \log \left(\frac{5}{3} \div \frac{5}{2} \right)}{2} = 500 \times \log \left(\frac{\cancel{5}}{3} \times \frac{2}{\cancel{5}} \right)$$

$$= 500 \times \log \left(\frac{2}{3} \right) = 500 \times \log \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = -1 \times 500 \times \log 1,5 = -500 \times \log 1,5$$

Cálculos auxiliares

$$Q(3) = 10^3 \log \left(\frac{10}{3+1} \right) = 10^3 \log \left(\frac{5}{2} \right)$$

$$Q(5) = 10^3 \log \left(\frac{10}{5+1} \right) = 10^3 \log \left(\frac{5}{3} \right)$$

$$(1) \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a \left(\frac{x}{y} \right)$$

Proposta de trabalho

- c) Mostre que a quantidade de água, em mililitros, que **passou ao estado gasoso**, t horas, após o início da experiência, é dada pelo modelo

$$G(t) = 1000 \log(t + 1).$$

$$1 \quad \log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$G(t) = \underset{\text{Evaporou}}{1000} - \underset{\substack{\text{Quantidade} \\ \text{inicial}}}{10^3} \times \underset{\substack{\text{Quantidade} \\ \text{existente}}}{Q(t)}$$

$$\begin{aligned} G(t) &= 1000 - 10^3 \times \log\left(\frac{10}{t+1}\right) = 1000 - 1000 \times \log\left(\frac{10}{t+1}\right) = 1000 \times \left[1 - \log\left(\frac{10}{t+1}\right)\right] \\ &= 1000 \times \left[\log 10 - \log\left(\frac{10}{t+1}\right) \right] = 1000 \times \left[\log\left(10 \div \frac{10}{t+1}\right) \right] = 1000 \times \left[\log\left(\cancel{10} \times \frac{t+1}{\cancel{10}}\right) \right] \\ &\quad \downarrow \log_a a = 1 \qquad = 1000 \times \log t + 1 \end{aligned}$$

Proposta de trabalho

d) A experiência é dada por concluída no momento em que a quantidade total de água tenha passado ao estado gasoso.

Durante quanto tempo decorreu a experiência?

$$G(t) = 1000$$

Quantidade inicial

$$1000 \times \log t + 1 = 1000$$

$$\Leftrightarrow \log t + 1 = \frac{1000}{1000} \Leftrightarrow \log t + 1 = 1 \Leftrightarrow t + 1 = 10^1 \Leftrightarrow t = 9$$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

R: A experiência decorreu durante 9 horas

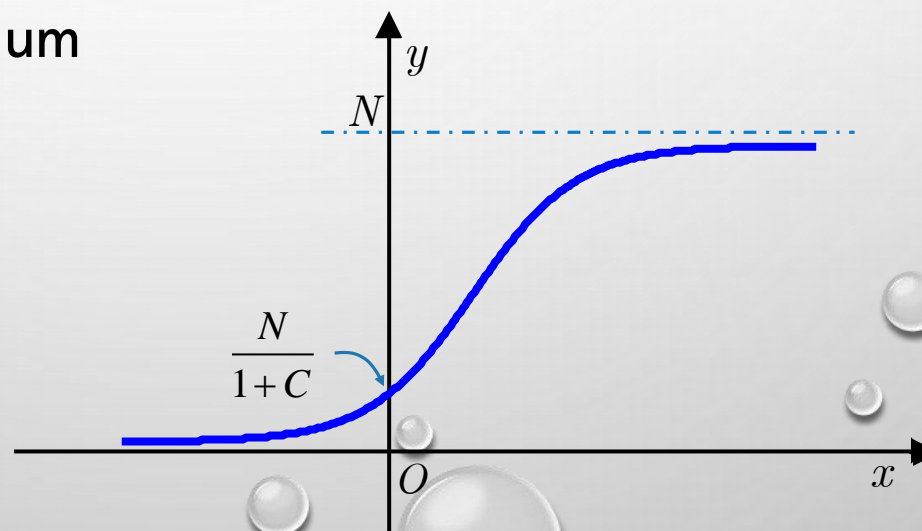
Modelo Logístico

O **modelo logístico** é dado por uma expressão do tipo

$$f(x) = \frac{N}{1 + C \times e^{-kx}}, \text{ com } N, C \text{ e } k \text{ constantes } \mathbf{positivas}.$$

Este modelo começa por aproximar-se de um *modelo exponencial*, seguido de uma certa estabilização, daí ter um crescimento limitado.

A representação gráfica é do tipo:



Modelo Logístico

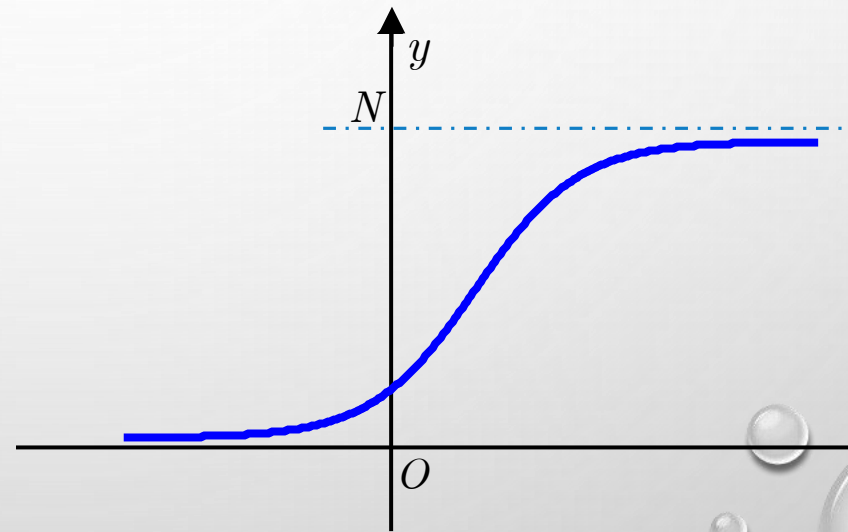
Pode generalizar-se que as funções do tipo $f(x) = \frac{N}{1 + C \times e^{-kx}}$, com N ,

C e k constantes reais positivas, possuem:

- $D_f = \mathbb{R}$
- $CD_f = \mathbb{R}^+$
- o seu gráfico tem duas **assíntotas horizontais** nas retas de equação

$$y = N \quad \text{e} \quad y = 0$$

$(x \rightarrow +\infty)$ $(x \rightarrow -\infty)$

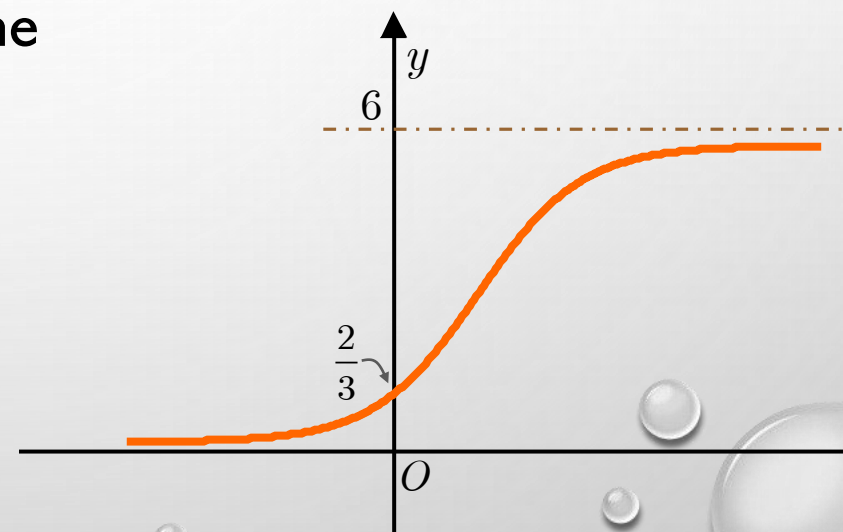


Proposta de trabalho



Na figura encontra-se uma representação gráfica de uma função f , definida por uma expressão do tipo $f(x) = \frac{N}{1 + C \times e^{-kx}}$, com N , C e $k \in \mathbb{R}^+$, e a reta de equação $y = 6$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f .

- a) Atendendo aos dados da figura, determine os valores de N e de c .



Proposta de trabalho

- b) Atendendo aos valores obtidos na alínea anterior e sabendo que o ponto de coordenadas $(\ln 2, 3)$ pertence ao gráfico de f , determine a expressão analítica de f .



Propostas de trabalho para fazer em casa



1. Na internet, no dia 14 de março de 2019, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes para um espetáculo. O último bilhete foi vendido às 20 horas desse mesmo dia.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em centenas, é dado aproximadamente pelo modelo

$$N(t) = 8 \log_4 (3t + 1)^3 - 8 \log_4 (3t + 1), \text{ com } t \in [0, 6].$$

a) Mostre que $N(t) = 16 \log_4 (3t + 1)$.

b) Determine analiticamente, o tempo necessário para serem vendidos 3800 bilhetes. Apresente o resultado em horas e minutos, arredondados às unidades.

c) Quantos bilhetes foram vendidos na totalidade para este espetáculo.

Propostas de trabalho para fazer em casa



2. Uma torneira veda mal; assim para evitar que o piso fique molhado, foi colocado sob a torneira um recipiente com 23 centímetros de altura.

Passadas t horas, após a colocação do recipiente sob a torneira, a altura de água no mesmo é dada, em centímetros pela função $A(t) = 0,5t + \log_3(2t + b)$, com $b \in \mathbb{R}$.



Sabe-se que, o **tempo de enchimento** do recipiente é de 38 horas.

- Mostre que o valor de b é 5.
- Determine, graficamente ao fim de quanto tempo é que a altura de água no recipiente atingiu **três quartos** da sua altura.
Apresente o resultado em horas e minutos arredondados às unidades.
- Determine a taxa média de variação de A , no intervalo $[2, 11]$ e interprete o resultado no contexto da situação.