



TELENSINO



MATEMÁTICA A – 10ºANO

Gracinda Santos

Operações com polinómios

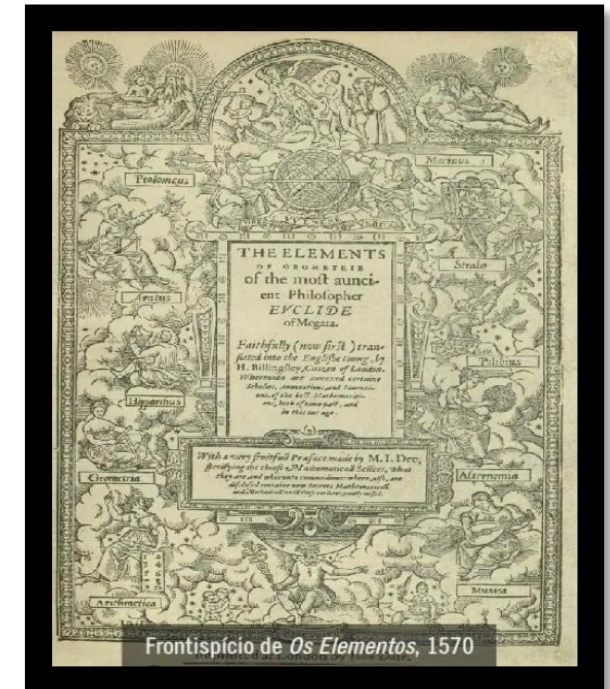
Divisão inteira (ou euclidiana) de polinómios



Algoritmo de Euclides



Determinar o máximo divisor comum entre dois números inteiros diferentes de zero.



“*Os Elementos*” – Obra composta por 13 livros que cobrem a **Geometria Euclidiana** e a versão mais antiga da **Teoria dos Números** elementar.

Os livros VII-IX são dedicados à **teoria dos números** tais como a divisibilidade de inteiros...

“*Os Elementos* são - a seguir à Bíblia - provavelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental.”

<https://webpages.ciencias.ulisboa.pt/>

Operações com polinómios

Exemplo 1

Divisão inteira de polinómios

$$A(x) = x^3 + x + 3x^2 - 2$$

$$B(x) = x^2 + x$$

Polinómio-dividendo

Polinómio-divisor

Colocar os termos do polinómio dividendo e do polinómio divisor por ordem decrescente de grau.

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 \quad \bigg| \quad x^2 + x$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 \quad \bigg| \quad x^2 + x$$

$$x$$

$$x^3 : x^2 = x$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + x - 2 \quad \bigg| \quad x^2 + x \\ -x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 + x - 2 \end{array}$$

Polinómio-quociente

$$2x^2 : x^2 = 2$$

Extraído da Escola Virtual

Polinómio-divisor: grau 2

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 + x - 2 \quad \bigg| \quad x^2 + x \\ -x^3 - x^2 \\ \hline 2x^2 + x - 2 \\ -2x^2 - 2x \\ \hline -x^1 - 2 \end{array}$$

$Q(x)$

Polinómio-resto: grau 1

$R(x)$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x^2 + x)(x + 2) + (-x - 2)$$

Polinómio-dividendo

Polinómio-divisor

Polinómio-quociente

Polinómio-resto

Obs: O grau do polinómio quociente é igual à diferença entre o grau do polinómio dividendo e o grau do polinómio divisor.

Operações com polinómios

Exemplo 2

$$A(x) = x^4 - 2x^2 - 3x - 2$$

$$B(x) = x^2 - x - 2$$

Dados dois polinómios $A(x)$ e $B(x)$, com $B(x) \neq 0$, diz-se que $A(x)$ é divisível por $B(x)$ se e só se o **resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é zero.**

Polinómio-divisível

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 0x^3 - 2x^2 - 3x - 2 \quad | \quad x^2 - x - 2 \\
 \underline{-x^4 + x^3 + 2x^2} \\
 x^3 - 3x - 2 \\
 \underline{-x^3 + x^2 + 2x} \\
 x^2 - x - 2 \\
 \underline{-x^2 + x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

Divisão
exata

$A(x)$ é divisível por $B(x)$

$$A(x) = B(x) \times Q(x)$$

Operações com polinómios

Divisão euclidiana de polinómios
e polinómio divisível

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Quociente} + \text{Resto}$$

0

A é divisível por B

- ✓ O grau do polinómio resto é inferior ao grau do polinómio divisor.
- ✓ O grau do polinómio quociente é igual à diferença entre o grau do polinómio dividendo e o grau do polinómio divisor.
- ✓ O polinómio quociente e o polinómio resto são únicos.

Operações com polinómios

Divisão inteira de polinómios

Exercício 1 Sejam $A(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 3$ e $B(x) = x - 1$.
Determina o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.



Resolução:

❑ Utilizando o algoritmo da divisão

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 x^2 - 5x + 3 \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 -4x + 3 \\
 \underline{4x - 4} \\
 -1
 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^2 + x - 4 \quad R(x) = -1$$

Matemático italiano
Paolo Ruffini (1765-1822)



❑ Utilizando a Regra de Ruffini

Valor que anula o polinómio divisor $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

	2	-1	-5	3	
1	2	2	1	-4	
		1	-4	-1	

Coeficientes do polinómio dividendo por decrescente do grau dos seus termos

polinómio resto $R(x) = -1$

Coeficientes do polinómio quociente

$$Q(x) = 2x^2 + x - 4$$

Operações com polinómios

Divisão inteira de polinómios

❑ Utilizando o algoritmo da divisão inteira

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - x^2 - 5x + 3 \quad | \quad x - 1 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 x^2 - 5x + 3 \\
 \underline{-x^2 + x} \\
 -4x + 3 \\
 \underline{4x - 4} \\
 -1
 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x^2 + x - 4$$

$$R(x) = -1$$



❑ Utilizando a Regra de Ruffini

1	2	- 1	- 5	3
1	2	1	-4	
2	1	-4	-1	

A **regra de Ruffini** é um processo prático e rápido para determinar o polinómio quociente e o polinómio resto da divisão inteira de dois polinómios quando o divisor é da forma $x - a$. Sendo 1 o grau de $x - a$, o **resto da divisão** é uma **constante** e o **quociente tem grau $n - 1$** (n é o grau do polinómio dividendo).

Divisão inteira de polinómios

Exercício 2

Sejam $A(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7$ e $B(x) = x + 2$.

Utilizando a regra de Ruffini, determina o quociente e o resto da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$.



Resolução:

$$A(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 0x + 7$$

Coeficientes do polinómio dividendo por ordem decrescente do grau dos seus termos e como é incompleto escreve-se os coeficientes dos termos nulos.

Valor que
anula o
polinómio
divisor

$$x + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ -2 & & -2 & -2 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & 8 & -9 \end{array}$$



$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 8 \quad R(x) = -9$$

$$\begin{aligned} A(x) &= (x + 2) \times (x^3 + x^2 - 4x + 8) + (-9) \\ &= \underline{x^4} + \underline{x^3} - \underline{4x^2} + \underline{8x} + \underline{2x^3} + \underline{2x^2} - \underline{8x} + \underline{16} - 9 \\ &= x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7 \end{aligned}$$

Divisão inteira de polinómios

Regra de Ruffini no caso do divisor ser do tipo $ax - b$ com $a \neq 0$

Como determinar o quociente e o resto nesta situação?

Considerando a divisão de $A(x) = 3x^2 + 4x - 2$ por $B(x) = 3x - 6$.

Temos que: $A(x) = (3x - 6) \times Q(x) + R(x)$

Para aplicar a regra de Ruffini procedemos da seguinte forma:

1ºPasso: Colocar em evidência o coeficiente de x do polinómio divisor, ou seja, $B(x) = 3(x - 2)$ e
 $A(x) = 3(x - 2) \times Q(x) + R(x)$

2ºPasso: Determinar o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $x - 2$
 Ao dividir $A(x)$ por $x - 2$ obtenho o quociente $Q_1(x) = 3x + 10$

3ºPasso: $A(x) = (3x - 6) \times Q(x) + R(x)$
 $A(x) = 3(x - 2) \times Q(x) + R(x)$
 $A(x) = (x - 2) \times 3 \times Q(x) + R(x)$

O quociente de $A(x)$ por $x - 2$ é igual a $3 \times Q(x)$

então $Q_1(x) = 3 \times Q(x) \Leftrightarrow Q(x) = \frac{Q_1(x)}{3}$

$$\begin{array}{r|l} A(x) & ax - b \\ R(x) & Q(x) \end{array}$$

$$A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$$

Regra de Ruffini

	3	4	- 2
		6	20
2	3	10	18

$R(x) = 18$

$$Q(x) = \frac{3x + 10}{3} = x + \frac{10}{3}$$

$$A(x) = \underbrace{(3x - 6)}_{B(x)} \times \underbrace{\left(x + \frac{10}{3}\right)}_{Q(x)} + \underbrace{18}_{R(x)}$$

Divisão inteira de polinómios

Regra de Ruffini no caso do divisor ser do tipo $ax - b$ com $a \neq 0$

De um modo geral,

$$A(x) = (ax - b) \times Q(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{r|l} A(x) & ax - b \\ R(x) & Q(x) \end{array}$$

Como $(ax - b) = a \left(x - \frac{b}{a} \right)$ então $A(x) = \underline{a} \left(x - \frac{b}{a} \right) \times \underline{Q(x)} + R(x)$



Ao dividir $A(x)$ por $\left(x - \frac{b}{a} \right)$ obtenho um quociente, $Q_1(x)$, que é igual a $a \times Q(x)$.

Utilizando a regra de Ruffini

$$Q_1(x) = a \times Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{Q_1(x)}{a}$$

Estuda com Autonomia!

Procura no teu manual os exercícios relacionados com a divisão inteira de polinómios e pratica.

“O conhecimento dirige a prática; no entanto, a prática aumenta o conhecimento”

Thomas Fuller (Historiador)

***“Na sala de aula, todos ensinam, todos aprendem.”
Em casa, também, poderá ser igual!***

