



TELENSINO



MATEMÁTICA A – 10ºANO

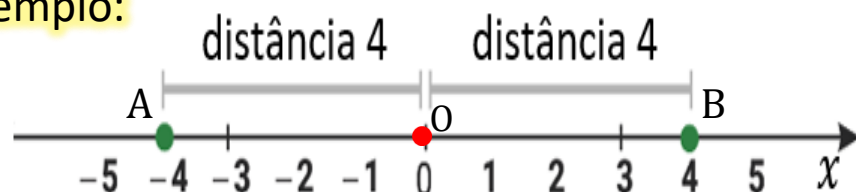
Gracinda Santos

Função Módulo



Valor absoluto (ou módulo) de um número x .
Simbolicamente: $|x|$

Exemplo:



- ✓ O valor absoluto de -4 é 4, ou seja,
 $|-4| = d(O, A) = 4$
- ✓ O valor absoluto de 4 é 4, ou seja,
 $|4| = d(O, B) = 4$
- ✓ $|0| = d(O, O) = 0$

Repara que:

- Se $x \geq 0$ então $|x| = x$
- Se $x < 0$ então $|x| = -x$
Exemplo: Se $x = -4$, $|-4| = 4 = -(-4)$



A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada número real faz corresponder o seu valor absoluto (ou módulo), $x \mapsto |x|$.

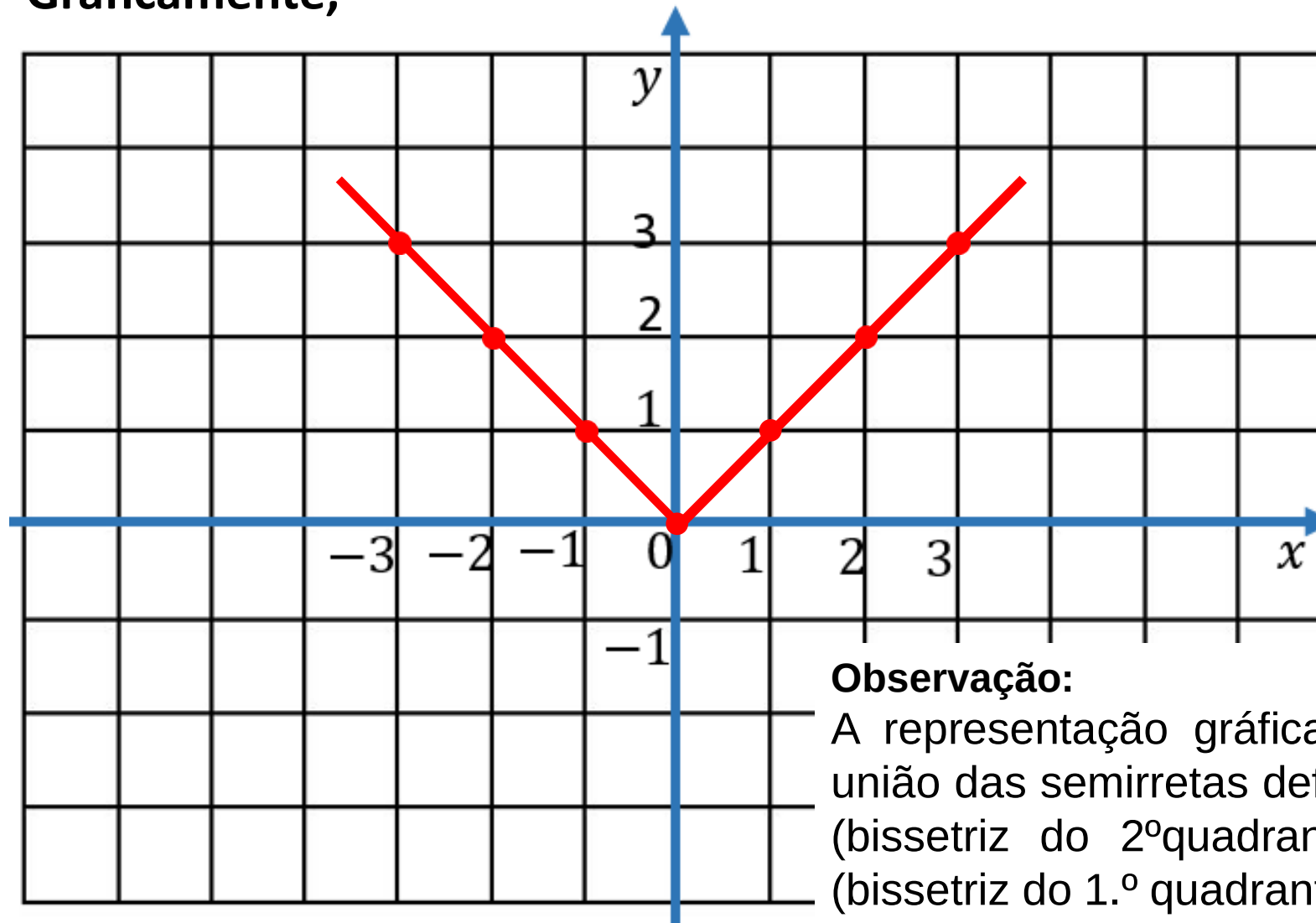
$$f(x) = |x|$$

Esta função pode ser definida por ramos:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Função Módulo

Graficamente,



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

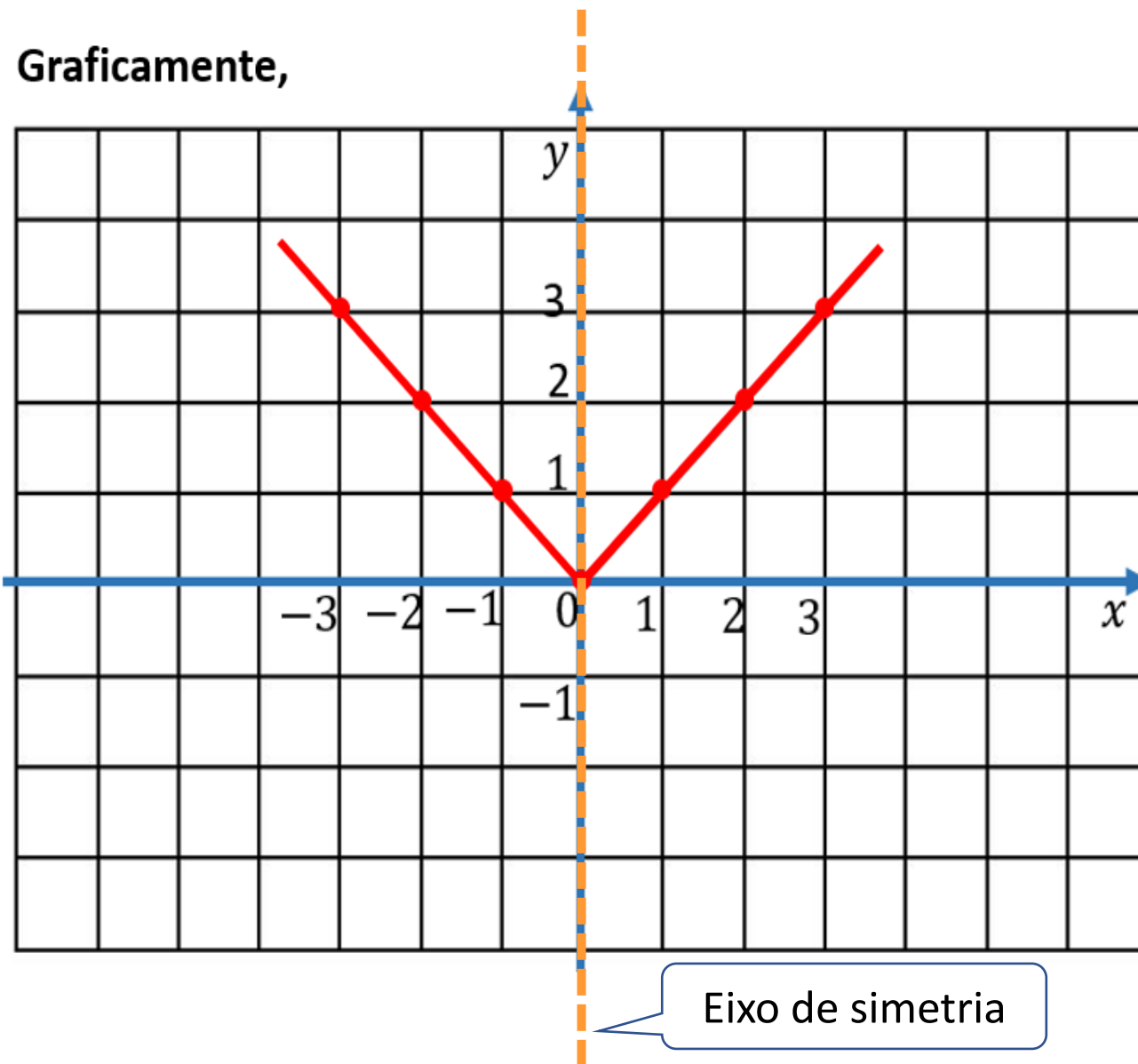
x	$y = x $
0	0
1	1
2	2
3	3
-1	1
-2	2
-3	3

Observação:

A representação gráfica da função módulo é a união das semirretas definidas por $y = -x \wedge x < 0$ (bissetriz do 2ºquadrante) e por $y = x \wedge x \geq 0$ (bissetriz do 1.º quadrante).

Função Módulo

Graficamente,



$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

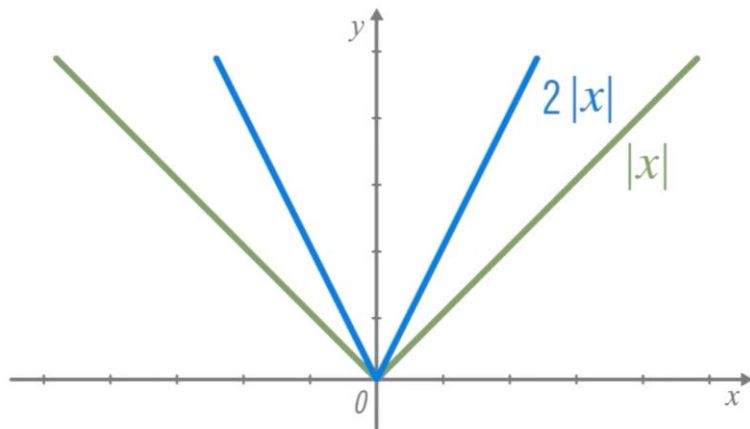
- ❖ $D_f = \mathbb{R}$
- ❖ $CD_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$
- ❖ Zeros: tem um único zero, 0.
- ❖ Sinal: Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ❖ Monotonia:
 - Estritamente decrescente em $] -\infty, 0]$
 - Estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
- ❖ Extremos:
 - Mínimo absoluto é o 0 em $x = 0$, minimizante.
- ❖ O eixo Oy é um eixo de simetria do seu gráfico
- ❖ É uma função par, atendendo que $|-x| = |x|$.

Função Módulo

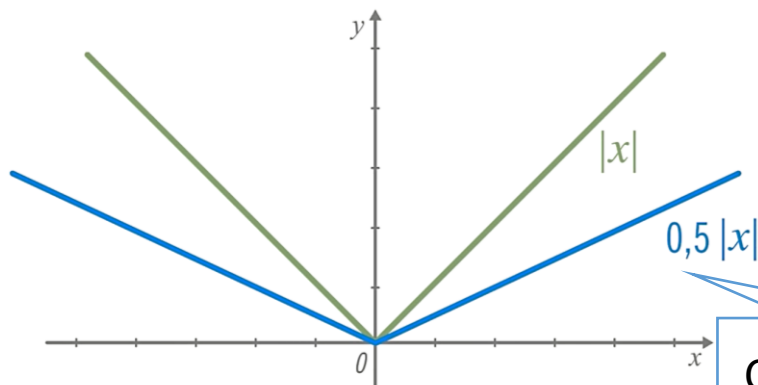
O gráfico de uma função do tipo $y = a|x - b| + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, pode ser obtido a partir do gráfico da função $y = |x|$, através da aplicação sucessiva de transformações geométricas.

Função Módulo

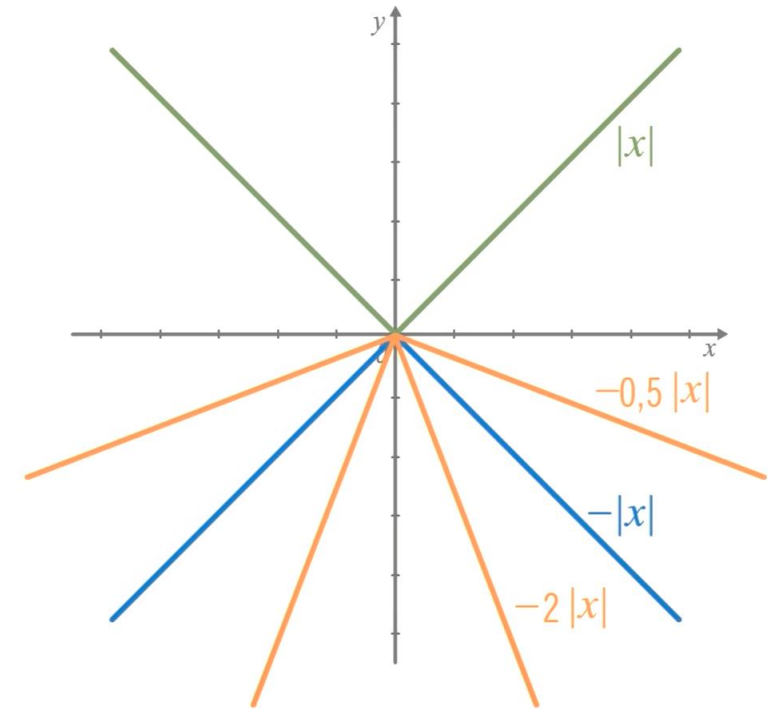
Funções do tipo $y = a|x|$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



Dilatação vertical se
 $a > 1$



Contração vertical se
 $0 < a < 1$



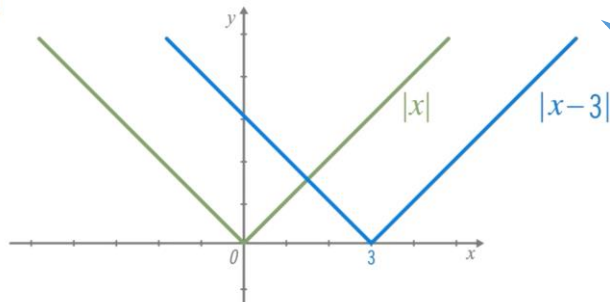
Se $a < 0$, verifica-se uma simetria do gráfico $y = |x|$ em relação ao eixo Ox , contraindo na vertical se $-1 < a < 0$, ou dilatando na vertical se $a < -1$).

Função Módulo

Funções do tipo $y = a|x - b| + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$$f(x) = |x|$$

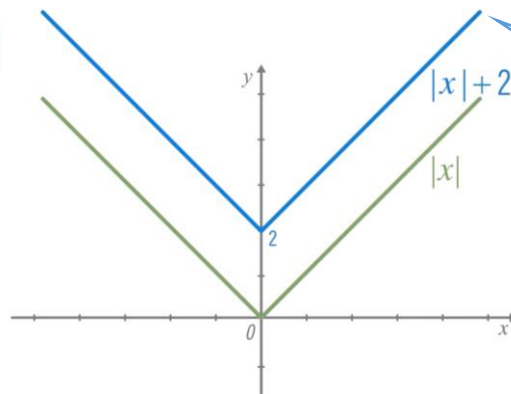
$$f(x) = |x - b|$$



Translação de
vetor $\vec{u}(3, 0)$

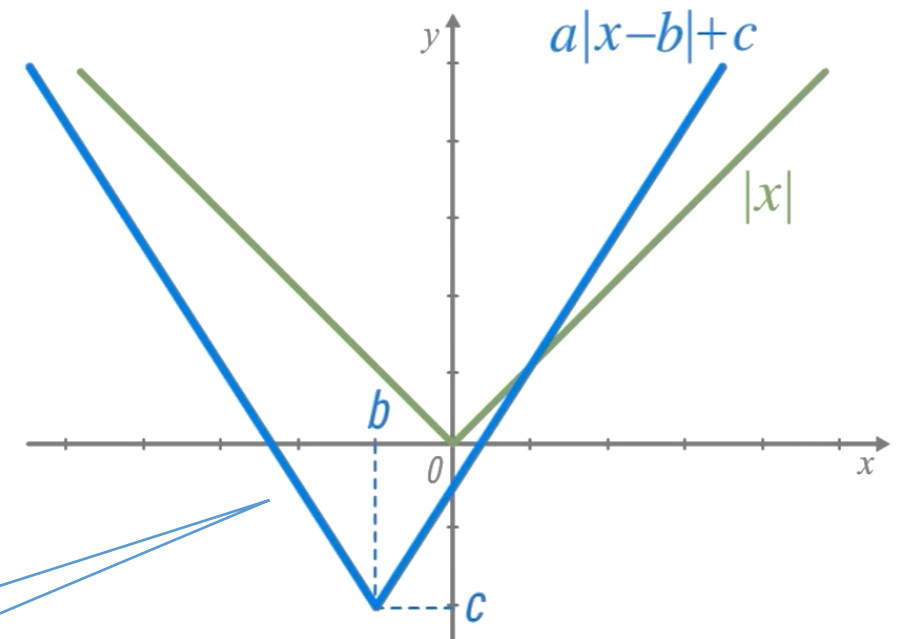
$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = |x| + c$$



Translação de
vetor $\vec{u}(0, 2)$

$$f(x) = a|x - b| + c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$



Translação de
vetor $\vec{u}(b, c)$

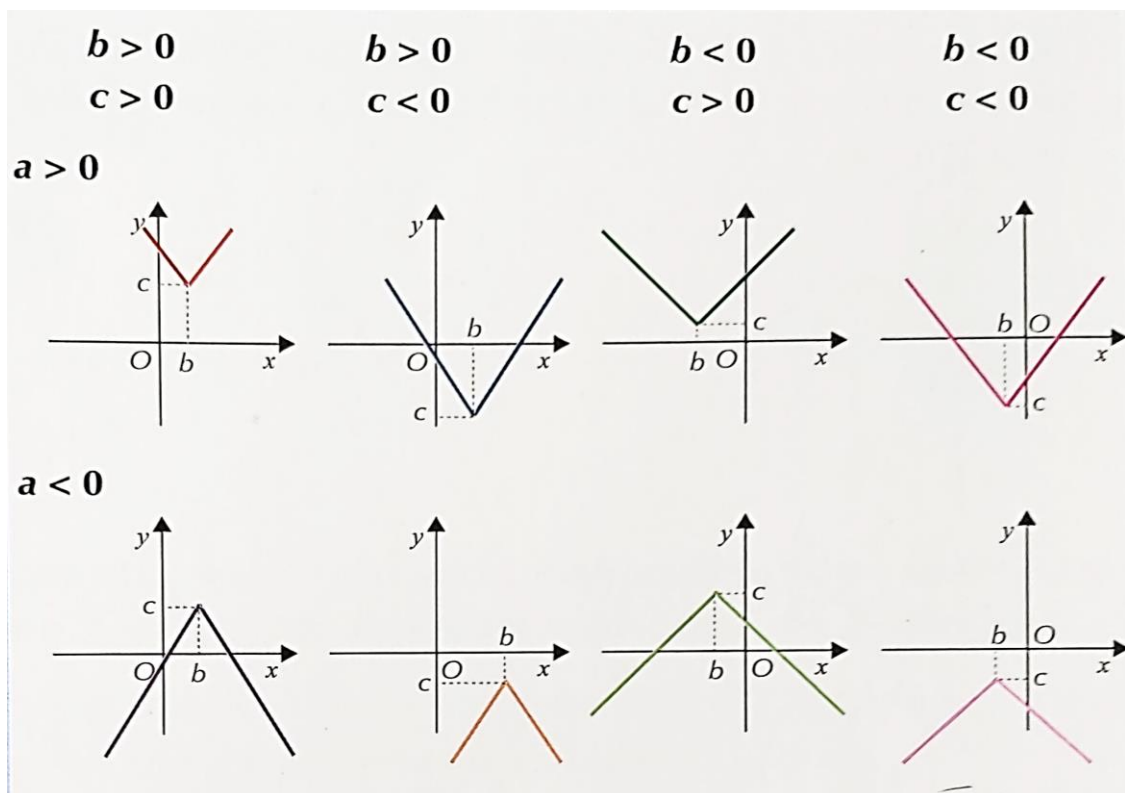
Função Módulo

Síntese



No geral, a partir da função módulo, $y = |x|$, podemos obter uma função da família $f(x) = a|x - b| + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, através das várias transformações de gráficos de funções já estudadas.

Representação gráfica



Algumas características gerais

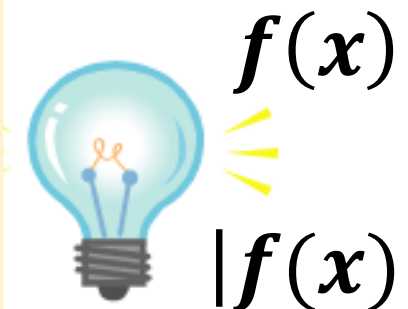
$y = a x - b + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$	$a > 0$	$a < 0$
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$CD = [c, +\infty[$	$CD =]-\infty, c]$
Zeros	Se a e c têm o mesmo sinal, a função não tem zeros.	
Monotonia	Estritamente decrescente em $]-\infty, b]$ e estritamente crescente em $[b, +\infty[$.	Estritamente crescente em $]-\infty, b]$ e estritamente decrescente em $[b, +\infty[$.
Extremos	Mínimo absoluto: c em $x = b$	Máximo absoluto: c em $x = b$.

Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico de $|f|$

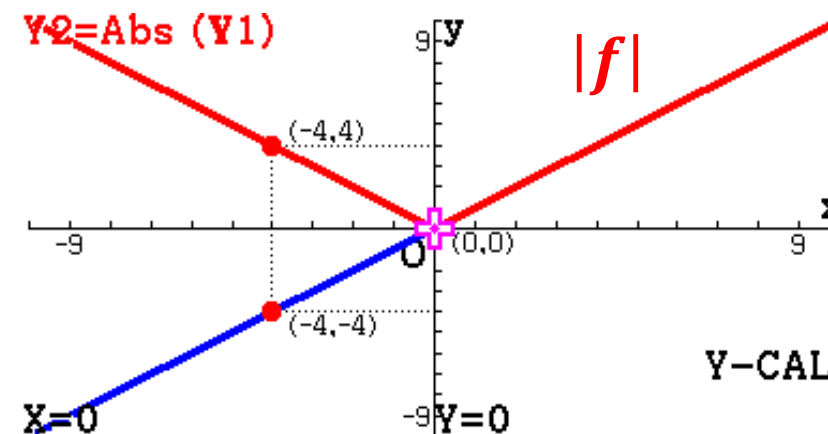
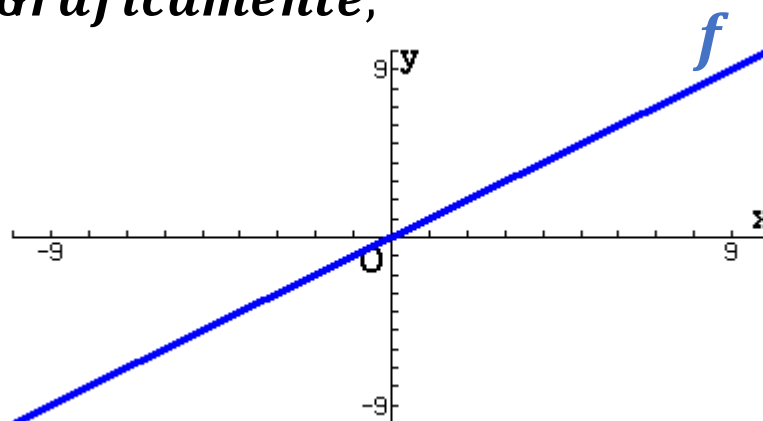
Exemplo 1

Considera a função f definida por $f(x) = x$.

$$|f(x)| = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Graficamente,



O gráfico da função $|f(x)|$ obtém-se a partir do gráfico da função f mantendo os pontos de ordenada positiva ou nula e transformando os pontos de ordenadas negativa pela reflexão de eixo Ox .

O gráfico de $|f(x)|$ está “acima” ou “sobre” o eixo Ox .

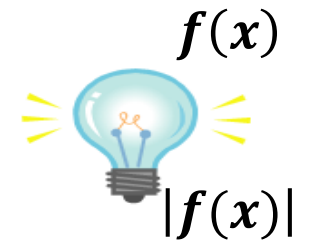
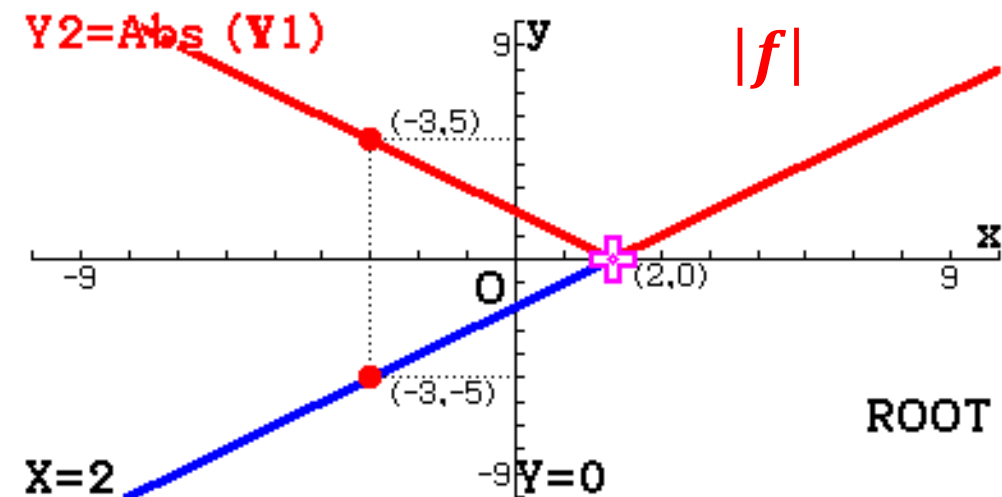
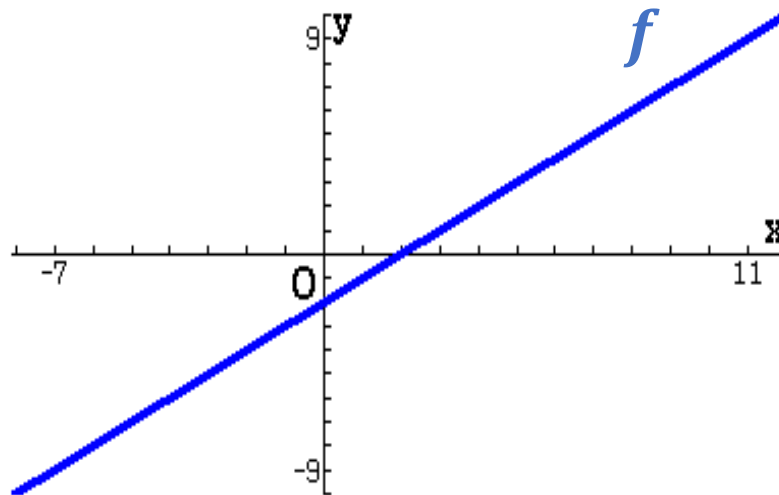
Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico de $|f|$

Exemplo 2

Considera a função f definida por:

$$f(x) = x - 2 \text{ e } |f(x)| = |x - 2|$$

Graficamente,

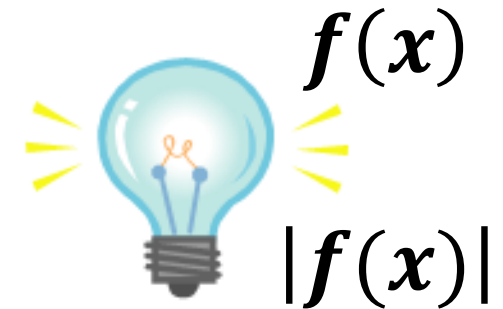


$$|f(x)| = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico de $|f|$

De um modo geral,

Dada uma função $f(x)$, a função $|f(x)|$ pode ser definida por:



$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Função Módulo

Exercício 1

Sem utilizar o símbolo módulo, define analiticamente a função $f(x) = 3|x - 1| + 2$.



Resolução

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = 3|x - 1| + 2 = \begin{cases} 3(x - 1) + 2 & \text{se } x - 1 \geq 0 \\ -3(x - 1) + 2 & \text{se } x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -3x + 5 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

De uma forma geral, uma função definida por:

$$y = a|x - b| + c = \begin{cases} a(x - b) + c, & x \geq b \\ -a(x - b) + c, & x < b \end{cases}$$

Função Módulo

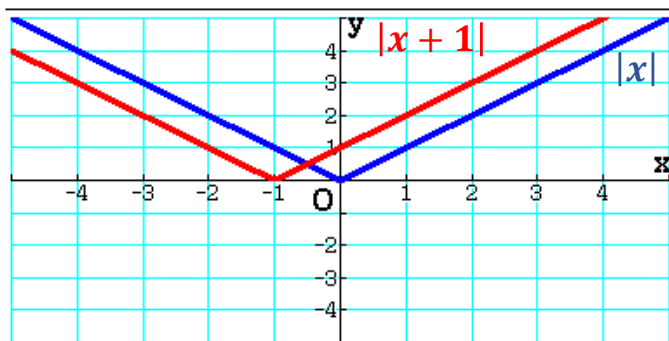
Exercício 2

Considera a função g definida por: $g(x) = -\frac{1}{2}|x + 1| - 4$.

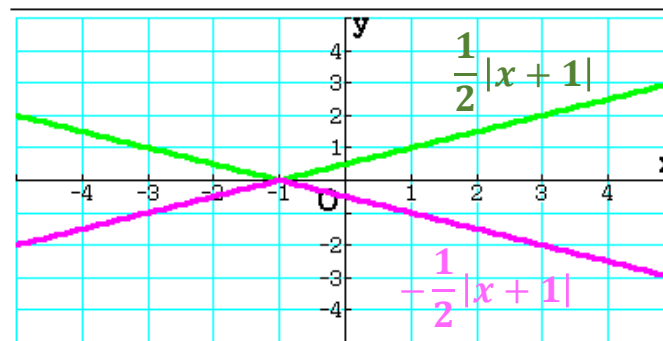
2.1 Descreve como se pode obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função $y = |x|$.



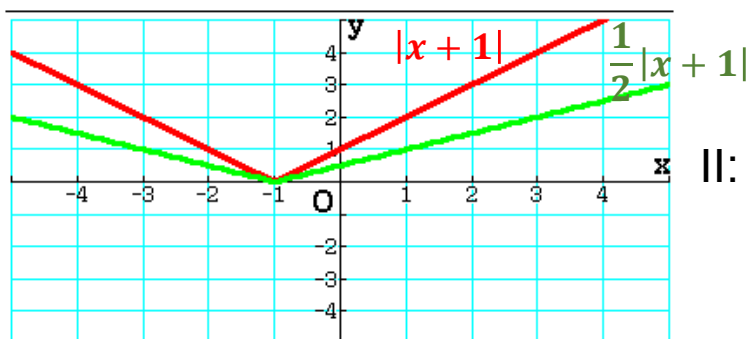
Resolução: Para obter o gráfico da função g a partir do gráfico da função $y = |x|$ aplica-se a seguinte sequência de transformações:



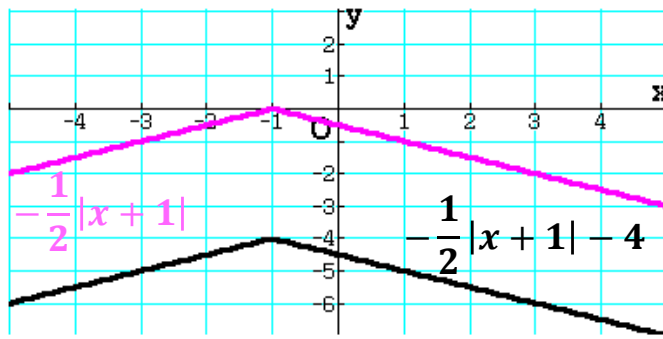
I: Translação horizontal de vetor $\vec{u}(-1, 0)$;



III: Reflexão de eixo Ox ;



II: Contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$;



IV: Translação vertical de vetor $\vec{u}(0, -4)$.

Função Módulo

Exercício 2

Considera a função g definida por: $g(x) = -\frac{1}{2}|x + 1| - 4$.

2.2 Indica o contradomínio, os intervalos de monotonia, o extremo e o número de zeros de g .

2.3 Sem utilizar o símbolo módulo, define analiticamente a função g .



Resolução:

Agora é a tua vez!

*“Na sala de aula, todos ensinam, todos aprendem.”
Em casa, também, poderá ser igual!*



Estuda com
Autonomia!