TELENSINO 2020

MATEMÁTICA A – 10ºANO

Gracinda Santos

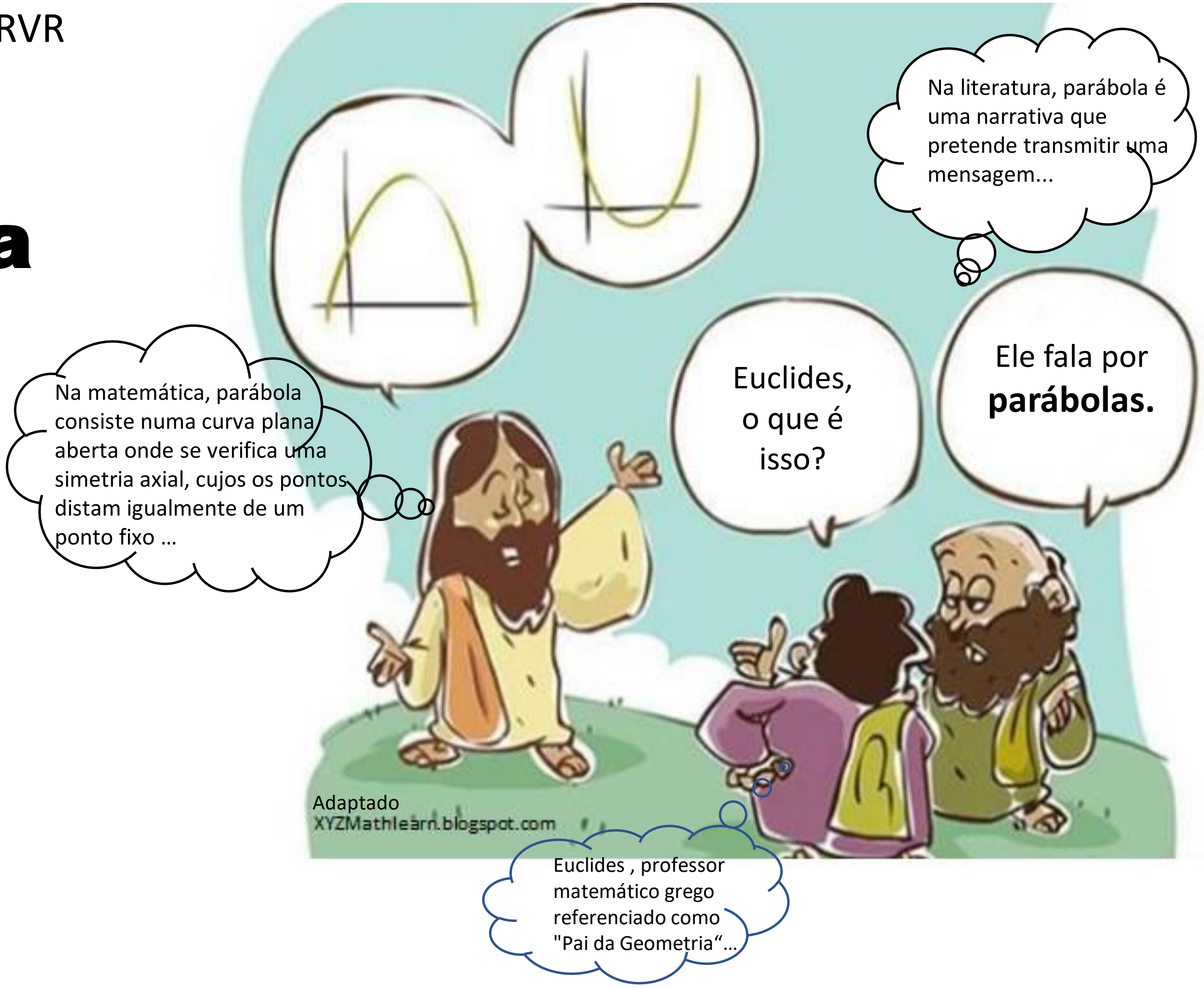
Domínio: Funções Reais de Variável Real-FRVR
Subdomínio: Estudo elementar de funções

Função Quadrática

Funções do tipo

$$y = a(x - h)^2 + k$$

com $h, k \in \mathrm{IR}$ e $a \in \mathrm{IR}\backslash\{0\}$

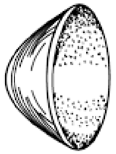


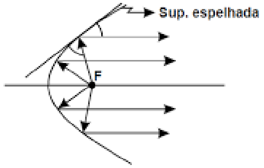
As **funções quadráticas** são representadas graficamente por curvas designadas por **parábolas.**

Na física, na astronomia, na tecnologia, nas comunicações…

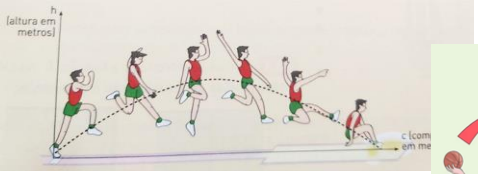

Antena parabólica

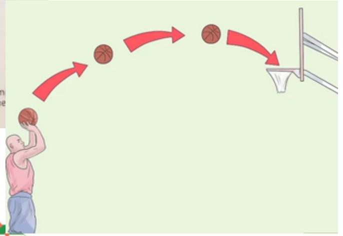
…na mecânica…


Farol de um automóvel

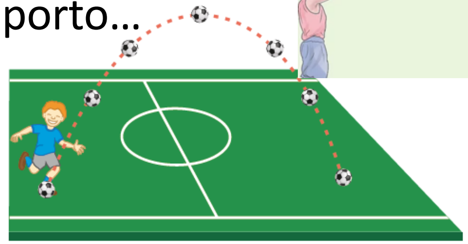


Secção de um farol





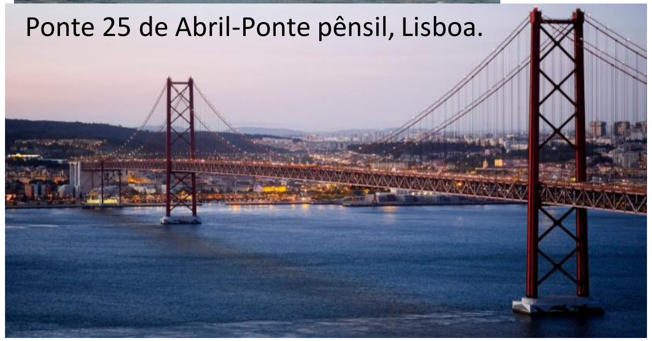
… no desporto…



… na engenharia, na arquitetura, nas construções de pontes e de edifícios…


Torre Eiffel, Paris.


Ponte da Arrábida-Porto


Ponte 25 de Abril-Ponte pênsil, Lisboa.

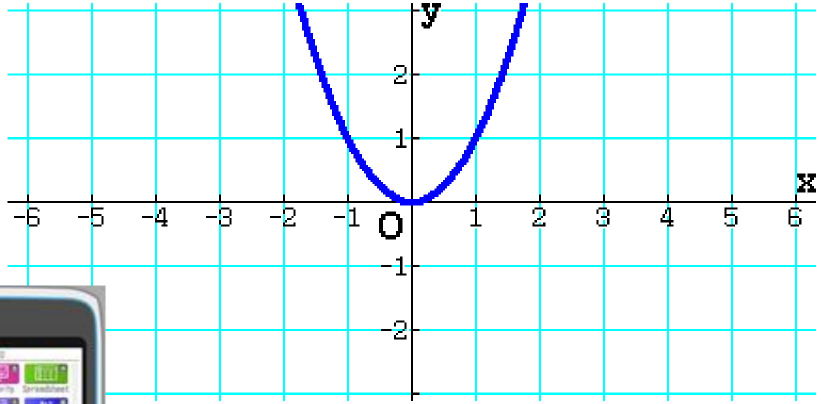
…na natureza…

O estudo de funções do tipo $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$, $h, k \in IR \ e \ a \in IR\backslash\{0\}$ será efetuado recorrendo às transformações geométricas de gráficos já estudados.

O estudo deste tipo funções foi iniciado no 9ºAno.

Funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$, $a \neq 0$.

A representação gráfica é uma parábola de **vértice** $\boldsymbol{V(0,0)}$ e **eixo de simetria** $\boldsymbol{x = 0}$



Com **recurso à calculadora gráfica**, vamos recordar o efeito do valor do parâmetro $\boldsymbol{a}$ neste tipo de funções.

Como instalar a calculadora gráfica Casio fx-CG50 no seu computador?

Emulador da calculadora gráfica Casio fx-CG50

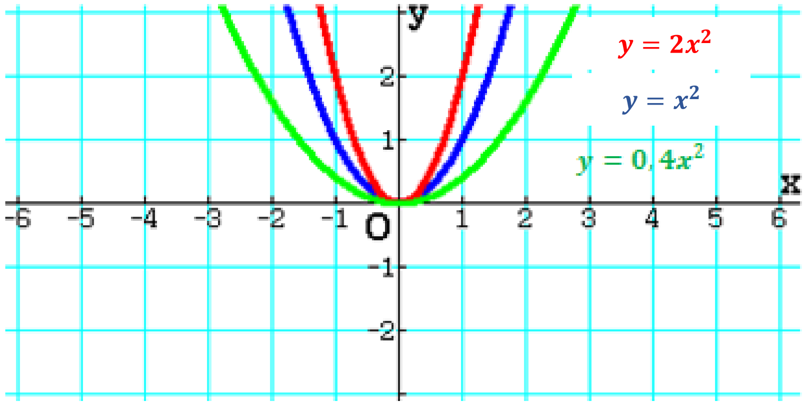
- 1º Aceder ao **site http://edu.casio.com**
- 2º Clicar no separador ***Educational Resources***
- 3º No final da página, encontra-se a opção ***Font Sets.***
- 4º Ao clicar, aceitar os termos e condições e de seguida selecionar o modelo pretendido.
- 5º Instalar os ficheiros que se encontram dentro da pasta zipada.

(Extraído da formação "Uso da calculadora gráfica, em contexto educativo", Ana Paula Jardim)

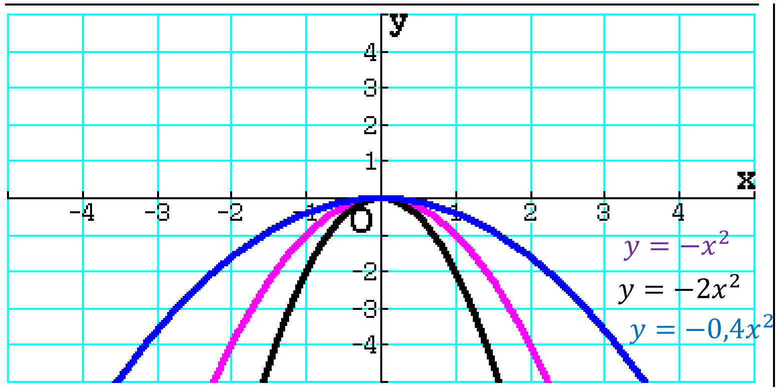
Funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2}$, $a \neq 0$.

Exemplo 1 Com recurso à calculadora gráfica, vamos representar graficamente as seguintes funções:

Valor do parâmetro a		Expressão da função
$a > 0$	1	$y = x^2$
	2	$y = 2x^2$
	$0{,}4$	$y = 0{,}4x^2$
$a < 0$	-1	$y = -x^2$
	-2	$y = -2x^2$
	$-0{,}4$	$y = -0{,}4x^2$

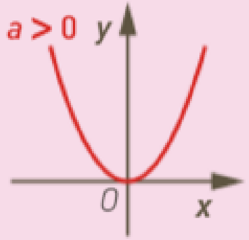
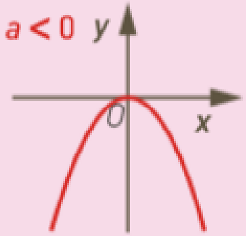


Concavidade voltada para cima $a > 0$.



Concavidade voltada para baixo $a < 0$.

O valor do parâmetro $\boldsymbol{a}$ determina o sentido da concavidade da parábola e quanto maior for o seu valor absoluto menor é a abertura da parábola.

Funções do tipo $y = ax^2$ com $a \neq 0$.		
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[0, +\infty[$	$]-\infty, 0]$
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Zeros	0	0
Sinal	Positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$	Negativa em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty, 0]$ Crescente em $[0, +\infty[$	Crescente em $]-\infty, 0]$ Decrescente em $[0, +\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto: 0 Minimizante: 0	Máximo absoluto: 0 Maximizante: 0
Vértice e eixo de simetria da parábola	Vértice: $V(0, 0)$ Eixo de simetria: $x = 0$	Vértice: $V(0, 0)$ Eixo de simetria: $x = 0$

Extraído do manual **Novo Espaço Matemática A 10ºAno**, Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues – Porto Editora

Funções do tipo $\boldsymbol{y = a(x-h)^2}$, $a \neq 0$ e $h \in IR$.

Exemplo 2

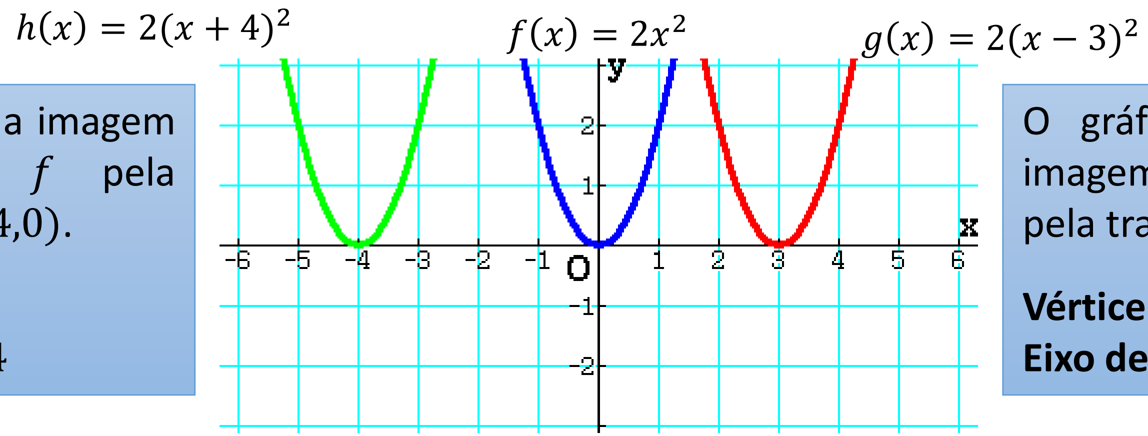
Consideremos as funções f, g e h , de domínio IR, definidas por:

$$f(x) = 2x^2 \qquad g(x) = 2(x-3)^2 \qquad h(x) = 2(x+4)^2$$

Com recurso à calculadora gráfica, vamos representar graficamente as funções f, g e h .

O gráfico da função h é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(-4{,}0)$.

Vértice: $V(-4{,}0)$
Eixo de simetria: $x = -4$



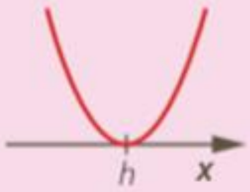
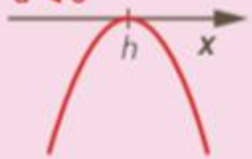
O gráfico da função g é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(3{,}0)$.

Vértice: $V(3{,}0)$
Eixo de simetria: $x = 3$

De um modo geral,

Seja $f(x) = ax^2$, $com\ a \neq 0$ e $g(x) = a(x-h)^2$, com $a \neq 0$ e $h \in IR$, o gráfico de função g é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(h, 0)$.

O gráfico da função $\boldsymbol{g(x) = a(x-h)^2}$ é uma parábola **de vértice $\boldsymbol{V(h, 0)}$** e **eixo de simetria $\boldsymbol{x = h}$.**

Funções do tipo $y = a(x-h)^2$, $a \neq 0$ e $h \in IR$	$a > 0$ 	$a < 0$ 
Domínio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Contradomínio	$[0\,,\,+\infty[$	$]-\infty\,,\,0]$
Concavidade	Voltada para cima	Voltada para baixo
Zeros	h	h
Sinal	Positiva em $\mathbb{R}\setminus\{h\}$	Negativa em $\mathbb{R}\setminus\{h\}$
Monotonia	Decrescente em $]-\infty\,,\,h]$ Crescente em $[h\,,\,+\infty[$	Crescente em $]-\infty\,,\,h]$ Decrescente em $[h\,,\,+\infty[$
Extremos	Mínimo absoluto: 0 Minimizante: h	Máximo absoluto: 0 Maximizante: h
Vértice e eixo de simetria da parábola	Vértice: $V(h\,,\,0)$ Eixo de simetria: $x = h$	Vértice: $V(h\,,\,0)$ Eixo de simetria: $x = h$

Extraído do manual **Novo Espaço Matemática A 10ºAno**, Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues – Porto Editora

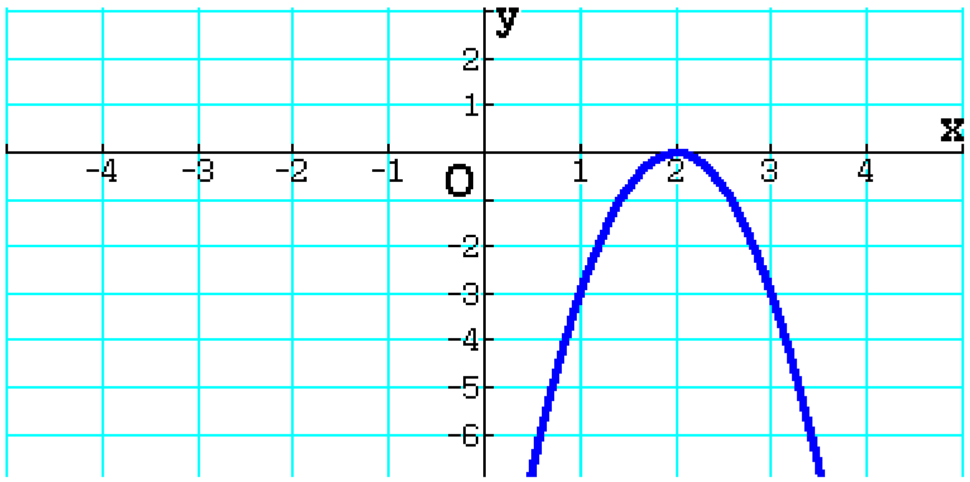
Exercício 1

Seja f a função definida por: $f(x) = -3(x-2)^2$.
Faz o estudo da função f.

Resolução:

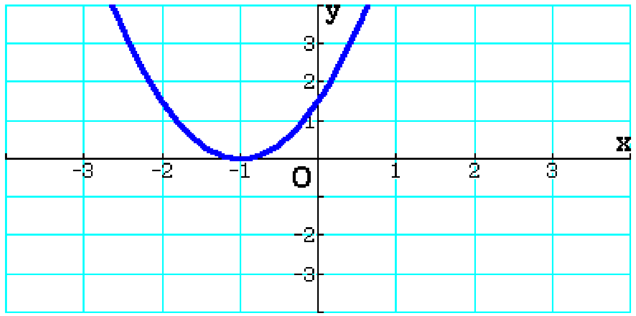
O gráfico da função f é a imagem do gráfico da função $y = -3x^2$ pela translação de vetor $\vec{u}(2,0)$.

- Concavidade voltada para baixo
- Domínio: $D_f = IR$
- Contradomínio: $CD_f =]-\infty, 0]$
- Zero: 2
- Sinal: Negativa em IR\{2}
- Monotonia:
  crescente em $]-\infty, 2]$ e
  decrescente em $[2, +\infty[$
- Máximo absoluto: 0
  Maximizante: 2
- Vértice: $V(2,0)$
- Equação do eixo de simetria: $x = 2$



Exercício 2

Na figura está representada uma função f, tal que $f(x) = a(x-h)^2$.
Sabendo que os pontos $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $(-1, 0)$ pertencem ao gráfico de f,
determina os valores de a e h.



Resolução:

O ponto $(-1, 0)$ representa as coordenadas do vértice da parábola logo $f(x) = a(x+1)^2$
Por outro lado, como o ponto $\left(0, \frac{3}{2}\right) \in f$, substituído na equação $y = a(x+1)^2$ vem:

$$\frac{3}{2} = a(0+1)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = a$$

Assim concluímos que $a = \frac{3}{2}$ e $h = -1$ e $f(x) = \frac{3}{2}(x+1)^2$.

Funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + k}$, $a \neq 0$ e $k \in IR$.

Exemplo 2

Consideremos as funções f, g e h , de domínio IR, definidas por:

$$f(x) = 2x^2 \qquad g(x) = 2x^2 + 3 \qquad h(x) = 2x^2 - 1$$

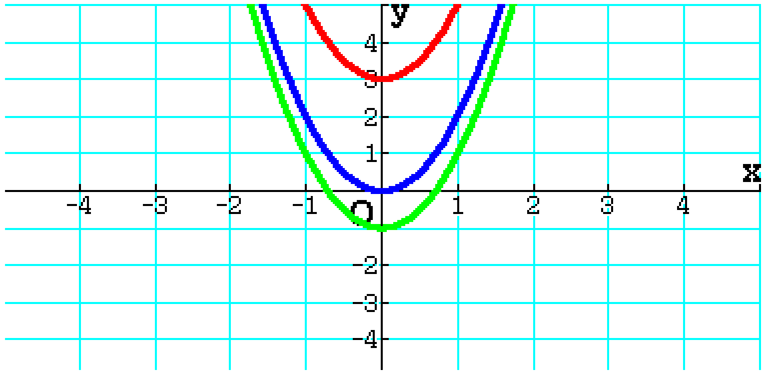
Com recurso à calculadora gráfica, vamos representar graficamente as funções f, g e h .

O gráfico da função g é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(0,3)$.

Vértice: $V(0,3)$
Eixo de simetria: x =0

O gráfico da função h é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(0,-1)$.

Vértice: $V(0,-1)$
Eixo de simetria: $x = 0$



$\boldsymbol{f(x) = 2x^2}$

$g(x) = 2x^2 + 3$

$\boldsymbol{h(x) = 2x^2 - 1}$

De um modo geral,

Seja $f(x) = ax^2$, $com\ a \neq 0$ e

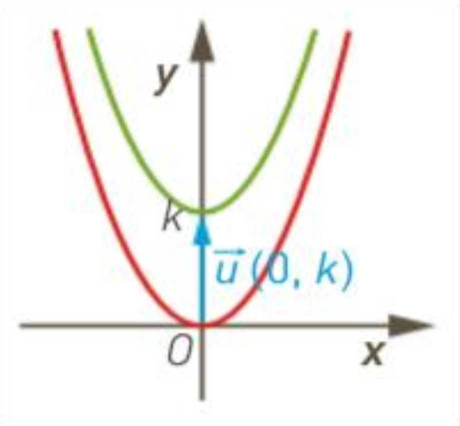
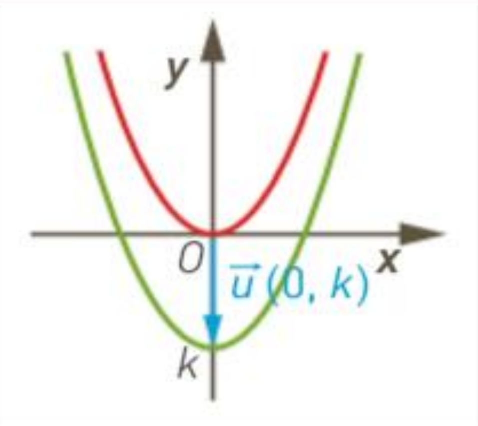
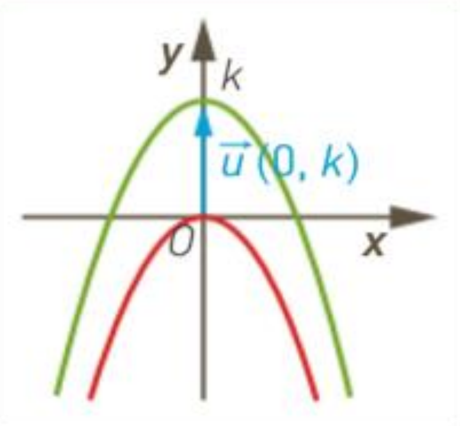
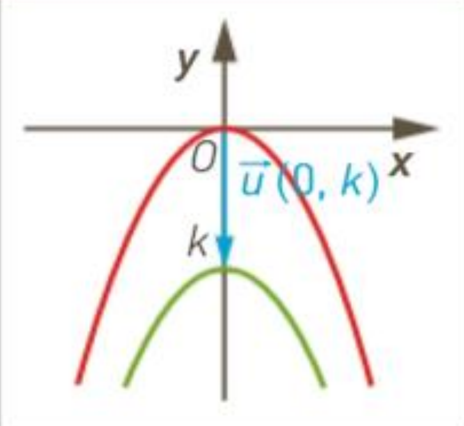
$g(x) = ax^2 + k$, com $a \neq 0$ e k $\in IR$,

o gráfico de função g é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(0, k)$.

O gráfico da função $g(x) = ax^2 + k$ é uma parábola **de vértice $\boldsymbol{V(0, k)}$** e **eixo de simetria $\boldsymbol{x = 0}$.**

Funções do tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + k}$, $a \neq 0$

O gráfico da função $y = ax^2 + k$ é a imagem do gráfico da função $y = ax^2$ pela translação de vetor $\vec{u}\,(0\,,\ k)$.

$a > 0$; $y = ax^2$		$a < 0$; $y = ax^2$	
$k > 0$ $y = ax^2 + k$	$k < 0$ $y = ax^2 + k$	$k > 0$ $y = ax^2 + k$	$k < 0$ $y = ax^2 + k$
			

Extraído do manual **Novo Espaço Matemática A 10ºAno**, Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues – Porto Editora

Funções do tipo $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$, $a \neq 0$ e $k, h \in IR$.

Exemplo 4

Consideremos as funções f, g e h , de domínio IR, definidas por:

$$f(x) = 2x^2 \qquad\qquad g(x) = 2(x-3)^2 - 2$$

Com recurso à calculadora gráfica, vamos representar graficamente as funções f e g.

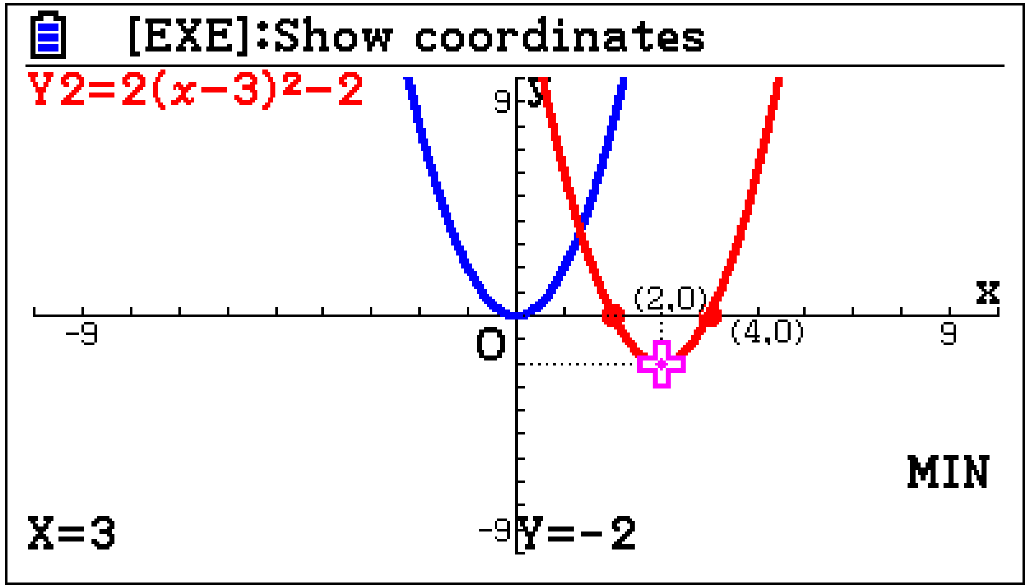
O gráfico da função g é a imagem do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(3, -2)$.

Vértice: $V(3, -2)$

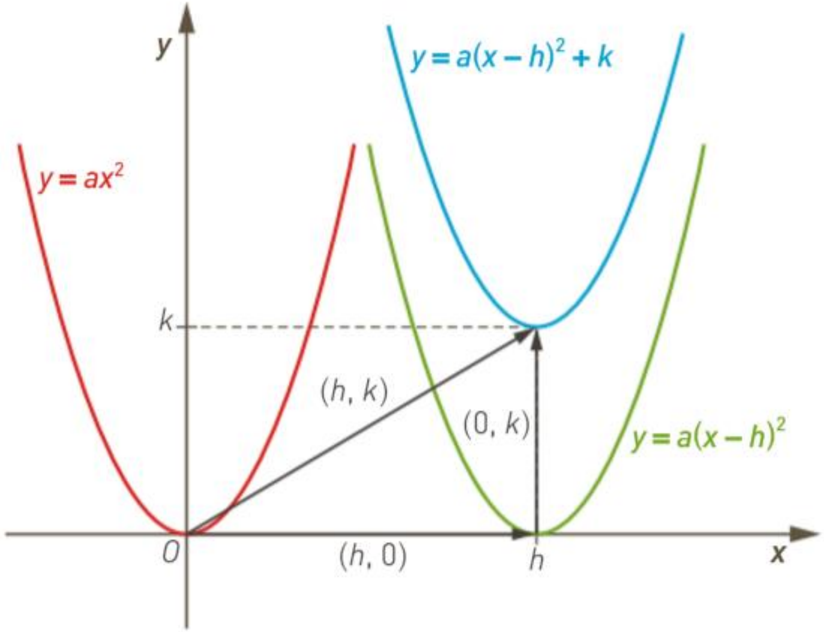
Eixo de simetria: $x = 3$

$CD_g = [-2, +\infty[$

Zeros: 2 e 4.



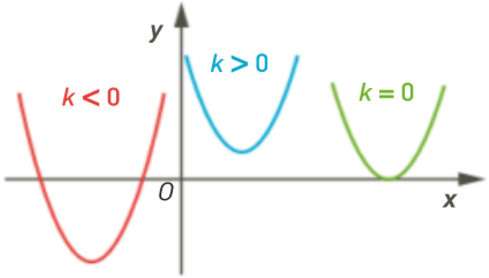
Funções do tipo $\boldsymbol{y = a(x-h)^2 + k}$, $a \neq 0,\ h, k \in IR$



No caso geral, seja f uma função de domínio IR definida por $f(x) = a(x-h)^2 + k$
O gráfico é representado por uma parábola de vértice $V(h, k)$, que é simétrico em relação à reta de equação $x = h$.

- Se $a > 0$, concavidade voltada para cima.
  Contradomínio: $D'_f = [k\ ,\ +\infty[$

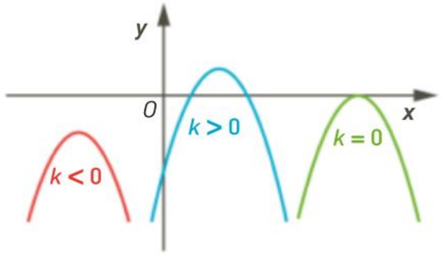
$y = a(x-h)^2 + k\ ,\ a > 0$



Zeros:
Se $k > 0$, não tem zeros.
Se $k = 0$, tem um só zero.
Se $k < 0$, tem dois zeros distintos.

- Se $a < 0$, concavidade voltada para baixo.
  Contradomínio: $D'_f =]-\infty\ ,\ k]$

$y = a(x-h)^2 + k\ ,\ a < 0$



Zeros:
Se $k < 0$, não tem zeros.
Se $k = 0$, tem um só zero.
Se $k > 0$, tem dois zeros distintos.

Extraído do manual **Novo Espaço Matemática A 10ºAno**, Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues – Porto Editora

Exercício 3

Seja f a função de domínio IR, definida por $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

3.1 Indique o contradomínio, as coordenadas do vértice e a equação do eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função.

3.2 Estude a função quanto à monotonia, extremos, zeros e sinal.

Resolução:

Agora é a tua vez!

O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.
Albert Einstein

"Na sala de aula, todos ensinam, todos aprendem."
Em casa, também, poderá ser igual!